DEVOIR DE CONTROLE N°2

EXERCICE N°1 :	10'	3 points	

Dans les figures ci-dessous on a :

Figure 1 : la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ et la courbe $\mathscr{C}'$ est celle de la restriction de f' sur $[0;+\infty[$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Figure 2 : S le solide de révolution engendré par la rotation de l'arc AB de $\mathscr{C}$ autour de l'axe $(O,\vec{i})$.

Figure 1

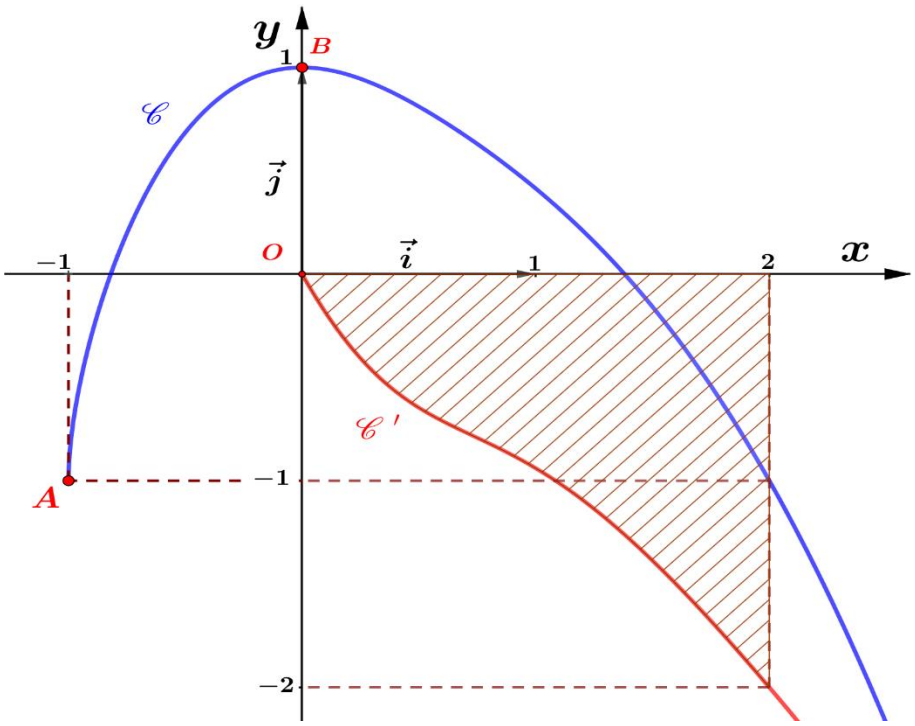
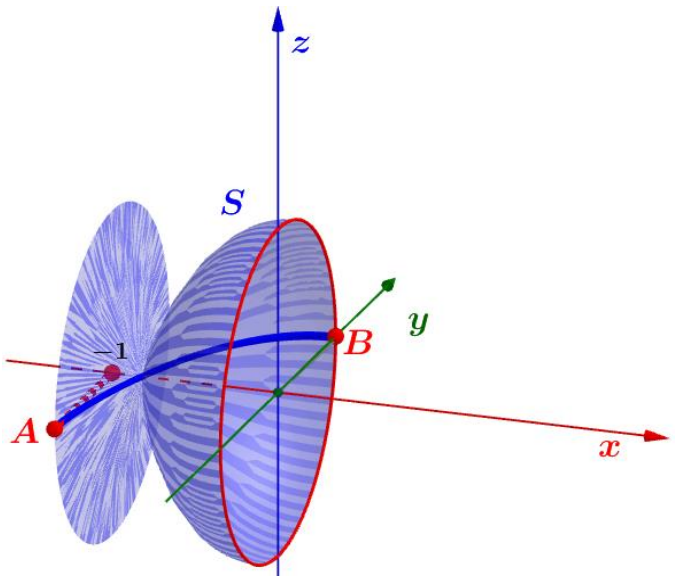


Figure 2



1°) Déterminer, en utilisant **la figure 1** ,

l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.

2°) Dans la suite de l'exercice, on admet que :

$f(x)=\sqrt{x^3+1}-x^2$.

a) Calculer $\int_{-1}^{0} x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$.

b) Calculer alors le volume $\mathcal{V}$ de S .

EXERCICE N°2 : 30' 6 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(1,0,1)$ et $I(1,-1,1)$.

1°) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z+2=0$.

a) Montrer que (S) est une sphère de centre $I(1,-1,1)$ et de rayon $R=1$.

b) Vérifier que (S) est tangente aux plans $(O,\vec{i},\vec{j})$, $(O,\vec{i},\vec{k})$ et $(O,\vec{j},\vec{k})$.

2°) Soit $\mathcal{P}$ le plan dont une équation : $x-y+z-2=0$.

a) Vérifier que la droite (OI) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

b) Montrer que $\mathcal{P}$ coupe (S) en un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre H et le rayon r.

3°) Dans la suite de l'exercice α est un réel et N est un point de la droite (OI) de coordonnées $(\alpha,-\alpha,\alpha)$.

a) Vérifier que $AN=d(t)=\sqrt{3t^2-4t+2}$.

b) Préciser le point N pour lequel la distance AN est minimale.

c) Vérifier qu'une équation du plan $\mathcal{P}_t$ passant par N et parallèle à $\mathcal{P}$ est : $x-y+z-3t=0$

d) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles le plan $\mathcal{P}_t$ est tangent à (S).

EXERCICE N°3 : 20' 4 points

On considère une fonction f continue sur $[0,+\infty[$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

1°) Utiliser le tableau de variation pour répondre aux questions suivantes :

a) Trouver un encadrement de f sur $[0,+\infty[$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{f(x)-1}$.

2°) Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de [0 ;1] sur un intervalle que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

3°) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Dresser le tableau de variation de g puis construire la courbe $\mathscr{C}$.

4°) Soit $I=\int_0^1 g(x)\,dx$ et $J=\int_0^1 x\,g'(x)\,dx$.

a) Donner une interprétation graphique de I.

b) Montrer que $1\le I\le 2$.

c) Calculer $I+J$.

d) En déduire que : $0\le J\le 1$.

EXERCICE N°4 :	50'	7 points	

Soit la fonction définie sur par $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)+2}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{8\sqrt{x}+(x+1)^3}{2\sqrt{x}(x+1)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation.

c) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $J=[-2,+\infty[$.

d) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ et que : $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$.

e) On note h la fonction réciproque de f.

On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer les courbes $\mathscr{C}$ de f et $\mathscr{C}'$ de h dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°) Soit H une primitive du h sur J.

a) Montrer que $H\circ f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $(H\circ f)'(x)=x f'(x)$.

b) En déduire que pour tout réels positifs a et b on a : $\int_{f(a)}^{f(b)}h(x)\,dx=\int_a^b x f'(x)dx$.

4°) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}'$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\dfrac{1}{2}$.

a) En utilisant une intégration par partie montrer que $\int_\alpha^1 x f'(x)\,dx=-\dfrac{7}{6}+\dfrac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}+\dfrac{2}{\alpha+1}$.

b) Montrer alors que $\mathcal{A}=\dfrac{10\alpha+6}{3(\alpha+1)^2}-\dfrac{7}{6}(u.a)$.